Faculté des Sciences et Techniques. UHA MULHOUSE

L3 MATHEMATIQUES - GEOMETRIE

TD2 : Division harmonique

Exercice 1 : Deux points Q et Q' partagent harmoniquement le segment PP' dans des rapports respectifs λ et λ'. Calculer en fonction de λ les rapports de partage

$$\frac{\overline{PQ}}{\overline{PQ'}} \quad \text{et} \quad \frac{\overline{P'Q}}{\overline{P'Q'}}.$$

Exercice 2. Soient deux cordes AB et AC d'un cercle de centre O. On mène le diamètre IJ perpendiculaire à (BC) qui coupe (AB) en E et (AC) en F.

(1) Que représente (AI) et (AJ) pour l'angle $\widehat{BAC}$?
(2) Comparer les rapports $\frac{IE}{IF}$ et $\frac{JE}{JF}$.
(3) Calculer le produit $\overline{OE} \cdot \overline{OF}$ en fonction du rayon du cercle.

Exercice 3. Dans un triangle ABC on désigne par D, E, F les pieds des hauteurs issues de A, B, C , par H l'orthocentre, par P l'intersection de (AD) et (EF).

(1) Montrer que les bissectrices du triangle EDF sont les hauteurs de ABC.
(2) Montrer que le faisceau $\{E, (A, H, P, D)\}$ est harmonique.
(3) Etablir la relation

$$\frac{2}{\overline{AH}} = \frac{1}{\overline{AP}} + \frac{1}{\overline{AD}}.$$

Exercice 4. Soient I et J les milieux de deux segments AB et CD d'une même droite Δ.

(1) Montrer que (AB, CD) est une division harmonique si et seulement si, M étant un point quelconque de Δ,

$$\overline{MA}.\overline{MB} + \overline{MC}.\overline{MD} = 2\overline{MI}.\overline{MJ}.$$

(2) Où placer le point M pour que la relation d'harmonie devienne

$$AB^2 + AC^2 = 2IJ^2.$$

(3) Application. Construire deux points C et D conjugués harmoniques par rapport à deux points donnés A et B, connaissant la longueur du segment CD.

Exercice 5. On mène d'un point A les tangentes (AB) et (AC) à un cercle de centre O. La corde de contact BC coupe le diamètre $[AO]$ en H et (AO) coupe le cercle en D et E.

(1) Que peut-on dire du faisceau $\{B, (A, H, D, E)\}$?
(2) Etablir la relation $\overline{OA} \cdot \overline{OH} = R^2$ où R est le rayon du cercle.

Exercice 6 Soit un triangle ABC, AH la hauteur issue de A, K le pied de la bissectrice intérieure de l'angle A, D et E les projections sur (BC) du centre du cercle inscrit I et du centre J du cercle exinscrit dans l'angle $\hat{A}$.

(1) Montrer que la division (A, K, I, J) est harmonique.
(2) Montrer qu'il en est de même de la division (H, K, D, E).
(3) Le point M étant le milieu de $[BC]$ établir la relation

$$\overline{MD}^2 = \overline{MH} \cdot \overline{MK}.$$