Faculté des Sciences et Techniques. UHA MULHOUSE

L3 MATHEMATIQUES - GEOMETRIE

TD3 : COCYCLICITE .
PUISSANCE D'UN POINT PAR RAPPORT A UN CERCLE

Exercice 1 (Droite de Simson). Soient ABC un triangle non aplati, M un point du plan , P, Q, R les projections orthogonales respectives de M sur $(BC), (CA)$ et (AB). Montrer que P, Q, R sont alignés si et seulement si M appartient au cercle $\mathcal{C}$ circonscrit à ABC. Si M appartient à $\mathcal{C}$, la droite (PQ) s'appelle la droite de Simson de M pour ABC.

Exercice 2. Soient $\mathcal{C}$ un cercle de centre O, $[AB]$ une corde de $\mathcal{C}$, I milieu de $[AB]$, $[MN]$ une corde de $\mathcal{C}$ passant par I. Les tangentes à $\mathcal{C}$ en M et N coupent (AB) en deux points notés P et Q. Montrer que $AP = BQ$.

Exercice 3. Soient $\mathcal{C}$ un cercle, A, B, C, D des points de $\mathcal{C}$, pris dans cet ordre sur $\mathcal{C}$, P, Q, R, S les milieux respectifs des arcs successifs AB, BC, CD, DA de $\mathcal{C}$. Montrer que $(PR) \perp (QS)$.

Exercice 4. Soient A, B, C un triangle non aplati, $a = BC, b = AC, c = BC$. On note A', B' et C' les pieds des bissectrices intérieures (i.e. intersection de la bissectrice issue d'un sommet avec le côté opposé) issues respectivement de A, B et C et on note A'', B'' et C'' les points d'intersection des bissectrices intérieures issues respectivement de A, B et C avec le cercle circonscrit à ABC. Montrer que

$$(abc)^2 = AA' \cdot AA'' \cdot BB' \cdot BB'' \cdot CC' \cdot CC''.$$

Exercice 5. Sur trois côtés BC, CA, et AB d'un triangle, on prend respectivement trois points P, Q, R. Démontrer que les cercles circonscrits aux triangles AQR, BRP et CPQ passent par un même point.

Exercice 6 Soient A', B', C' les pieds des hauteurs issues des sommets A, B, C d'un triangle ABC d'orthocentre H. Démontrer

(1) $\overline{A'B} \cdot \overline{A'C} = -\overline{A'H} \cdot \overline{A'A}$
(2) $\overline{HA} \cdot \overline{HA'} = \overline{HB} \cdot \overline{HB'} = \overline{HC} \cdot \overline{HC'}$.

Exercice 7 D'un point M de l'axe radical de deux cercles (extérieur à ces cercles) on mène une tangente à chacun d'eux. Montrer que la droite joignant les points de contact passe par l'un ou l'autre de deux points fixes.

Exercice 8 Soit ABC un triangle donné et P un point. On considère les 3 cercles circonscrits au triangles PAB PBC et PCA. Démontrer que les 3 cercles qui leur sont respectivement symétriques par rapport à $(AB), (BC)$ et (CA) passent par un même point P'.