Université de Haute Alsace
Faculté des Sciences et Techniques
Mulhouse

L3 MATHEMATIQUES: GEOMETRIE

Année 2009-2010

TD 5: L'INVERSION

Exercice 1 Soit O le pôle d'une inversion. Soit AA',BB', MM', trois couples de points inverses dans un plan. Démontrer la relation

$$(MA, MB) + (M'A', M'B') = (OA, OB).$$

Si le point M décrit un cercle passant par A et B, quel est l'ensemble des points M'?

Exercice 2 Relation d'Euler.

Soit Γ le cercle de centre O de rayon R circonscrit au triangle ABC. Soit γ le cercle inscrit à ce triangle et notons par I son centre. Soient a, b, c les points de contact de γ avec le triangle ABC. Soit A' le point d'intersection de IA avec bc, B' celui de IB avec ac et C' celui de IC avec ab. On niote enfin r le rayon du cercle inscrit et on pose $d = OI$.

1. Calculer
$$\overline{IA}.\overline{IA'},\ \overline{IB}.\overline{IB'},\ \overline{IC}.\overline{IC'}.$$
2. Montrer que l'image du cercle (ABC) dans l'inversion de centre I et de puissance r^2 est un cercle que l'on prcisera. Ce cercle est appelé le cercle d'Euler du triangel abc. Calculer son rayon.
3. Montrer que ces deux cercles sont homothétiques. Calculer le rapport λ de cette homothétie.
4. En déduire la relation d'Euler
$$d^2 = R^2 - 2Rr.$$
5. Montrer la réciproque

Exercice 3 Théorème de Feuerbach.

Montrer que le cercle des neuf points d'un triangle est tangent aux cercles inscrit et ex-inscrit au triangle.

Exercice 4 Théorème de Ptolémée.

Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'un quadrilatère convexe soit inscriptible est que le produit des diagonales soit égal à la somme des produits des côtés opposés.